

浅析空间中点到直线距离的求解方法

郑和柏

(陆军特种作战学院, 广西 桂林 541000)

【摘要】空间中点、直线、平面是空间解析几何中最重要的也是最基本的点的轨迹。在学习相关知识内容时, 我们经常会遇到求空间中点到直线距离的问题, 且大多数教材都没有给出直接的求解公式。本文从空间向量的运算、点与直线以及平面之间的关系, 以及一元函数最值、多元函数条件极值等不同角度探索空间中点到直线的距离的求解方法。

【关键词】点; 直线; 平面; 距离; 最小值

一、引言

在向量代数与空间解析几何中, 点、直线、平面是最重要也是最基本的知识内容, 其中包括空间直线方程、平面方程、点到直线的距离、点到平面的距离、直线与直线之间的关系问题、直线与平面之间的关系问题、平面与平面之间的关系问题等, 在这些问题中, 大部分都能推导得出判断或者求解的基本公式, 但是空间中点到直线的距离在大多数的教材或者参考资料中均未给出具体的求解公式。但是也正是这种未给出公式的问题, 给学生提供更多的自主探索的空间。在本文中, 我们将从不同知识内容的方面探索空间中点到直线的距离, 也得出在解决空间直线和平面的一些常用方法: 如直线的参数方程、平面束方程等。为了更好地叙述以及方便理解, 我们这里给出具体的点的坐标和直线的方程^[2]。

问题的提出: 求点 $M_0(1,0,1)$ 到直线 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ 的距离。

二、预备知识^[1]

(一) 向量的数量积与向量积

设 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3), \vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, 数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, 向量积 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$ 。

(二) 空间直线方程

设空间直线过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 方向向量 $\vec{s}=(m, n, p)$ 。

1. 直线的对称式或者点向式方程为:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (1)$$

2. 参数式方程为
$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}$$

3. 将 ① 转化为一般式方程为:

$$\begin{cases} nx-my-nx_0+my_0=0 \\ px-mz-px_0+mz_0=0 \end{cases} \quad (\text{表示方法不唯一})$$

(三) 空间中点到直线的距离

设空间点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $\Pi: Ax+By+Cz+D=0 (A^2+B^2+C^2 \neq 0)$ 外一点, 则点到点 M_0 是平面 Π 的距离公式为 $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 。

三、问题的主要求解方法

问题重述: 求点 $M_0(1,0,1)$ 到直线 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$

的距离。

方法一: 利用向量的数量积求解^[3]

解: 取 L 上一点过 $M_1(1,2,-1)$, 过 M_0 作直线 L 的垂相交线, 垂足为 M_2 , 则 M_0 到直线 L 的距离

$$d = |M_0 M_2|。$$

由题可得, $\overrightarrow{M_1 M_0} = (0, -2, 2)$, $|\overrightarrow{M_1 M_0}| = 2\sqrt{2}$, 直线的方向向量为 $\vec{s} = (2, 1, 2)$, $|\vec{s}| = 3$, $\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{s} = 2$ 得

$$\cos \angle M_0 M_1 M_2 = \frac{\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{s}}{|\overrightarrow{M_1 M_0}| |\vec{s}|} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| = |\overrightarrow{M_1 M_0}| \cdot \cos \angle M_0 M_1 M_2 = \frac{2}{3}$$

所以点 $M_0(1, 0, 1)$ 到直线 L 的距离为

$$d = |\overrightarrow{M_0 M_2}| = \sqrt{(|\overrightarrow{M_1 M_0}|)^2 - (|\overrightarrow{M_1 M_2}|)^2} = \frac{2\sqrt{17}}{3}。$$

方法二: 利用向量的向量积求解

解: 取 L 上一点过 $(1, 2, 1)$, $\overrightarrow{M_1 M_0} = (0, -2, 2)$, 直线的方向向量为 $\vec{s} = (2, 1, 2)$, $|\vec{s}| = 3$, 由向量积的

$$\text{几何意义可得: } d = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_0} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

$$\overrightarrow{M_1 M_0} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$$

得 $|\overrightarrow{M_1 M_0} \times \vec{s}| = 2\sqrt{17}$, 所以点 $M_0(1, 0, 1)$ 到直线 L 的距离为 $d = \frac{2\sqrt{17}}{3}$ 。

方法三: 利用向量的投影法求解

解: 取 L 上一点过 $M_1(1, 2, -1)$, 过 M_0 作直线 L 的垂直相交线, 垂足为 M_2 , 则 M_0 到直线 L 的距离 $d = |M_0 M_2|$ 。

由题可得, $\overrightarrow{M_1 M_0} = (0, -2, 2)$, $|\overrightarrow{M_1 M_0}| = 2\sqrt{2}$, 直线的方向向量为 $\vec{s} = (2, 1, 2)$, $|\vec{s}| = 3$, $\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{s} = 2$ 得

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \text{prj}_{\vec{s}} \overrightarrow{M_1 M_0} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{2}{3}$$

所以点 $M_0(1, 0, 1)$ 到直线 L 的距离为

$$d = |\overrightarrow{M_0 M_2}| = \sqrt{(|\overrightarrow{M_1 M_0}|)^2 - (|\overrightarrow{M_1 M_2}|)^2} = \frac{2\sqrt{17}}{3}。$$

方法四: 利用直线的参数方程求解

解: 直线的方向向量为 $\vec{s} = (2, 1, 2)$, 参数方程为

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t + 2 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

M_1 , 则 M_1 可设为 $(2t + 1, t + 2, 2t - 1)$,

$$\overrightarrow{M_0 M_1} = (2t, 2 + 2t, 2t - 2),$$

由题可得: $\overrightarrow{M_0 M_1} \cdot \vec{s} = 0$, $9t = 2$, $t = \frac{2}{9}$ 得点 M_1 的坐标为 $(\frac{13}{9}, \frac{20}{9}, -\frac{5}{9})$ 。

所以点 M_0 到直线 L 的距离为

$$d = |M_0 M_1| = \sqrt{(\frac{4}{9})^2 + (\frac{20}{9})^2 + (-\frac{14}{9})^2} = \frac{2\sqrt{17}}{3}。$$

方法五: 利用垂面方程求解

解: 设过点 M_0 且与直线 L 垂直的平面方程为 Π , 利用点法式可得平面 Π 的方程为 $2x + y + 2z - 4 = 0$, 过 M_0 作直线 L 的垂直相交线, 垂足为 M_1 , 可得为 M_1 直线 L 与的平面 Π 的交点,

$$\text{由 } \begin{cases} 2x + y + 2z - 4 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2} \end{cases} \text{ 得 } x = \frac{13}{9}, y = \frac{20}{9}, z = -\frac{5}{9}, \text{ 即点 } M_1$$

的坐标为 $(\frac{13}{9}, \frac{20}{9}, -\frac{5}{9})$, 所以点 M_0 到直线 L 的距离

$$\text{为 } d = |M_0 M_1| = \sqrt{(\frac{4}{9})^2 + (\frac{20}{9})^2 + (-\frac{14}{9})^2} = \frac{2\sqrt{17}}{3}。$$

方法六: 利用平面束方程求解^[2]

$$\text{解: 将直线 } L \text{ 转化为一般方程 } \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}, \text{ 则}$$

过直线的平面束方程为: $x - 2y + 3 + \lambda(x - z - 2) = 0$, 即 $(1 + \lambda)x - 2y - \lambda z + 3 - 2\lambda = 0$ 。

设过点 M_0 与直线 L 的平面为 Π_1 , 由题可得 Π_1 的方程为 $3x - 2y - 2z - 1 = 0$ 。

设过直线 L 且与平面 Π_1 垂直的平面为 Π_2 , 则

$$(1 + \lambda) \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + (-\lambda) \cdot (-2) = 0$$

解得 $\lambda = -\frac{7}{5}$, 可得平面 Π_2 的方程为

$2x + 10y - 7z - 29 = 0$ 。于是点 M_0 到直线 L 的距离 d 转化为点 M_0 到平面 Π_2 的距离, 利用空间中点到平面

的距离公式可得 $d = \frac{2\sqrt{17}}{3}$ 。

方法七：利用一元函数求最值的方法求解

解：直线的参数方程为 $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t+2 \\ z=2t-1 \end{cases}$ ，设 M_1

$(2t+1, t+2, 2t-1)$ 为 L 直线上任意一点，则

$$|M_0 M_1| = \sqrt{(2t)^2 + (t+2)^2 + (2t-2)^2} = \sqrt{9t^2 - 4t + 8}$$

可得点 M_0 到直线 L 的距离为 $d = |M_0 M_1|_{\min}$ ，令 $f(t) = 9t^2 - 4t + 8$

$f'(t) = 18t - 4$ ，令 $f'(t) = 0$ 得 $t = \frac{2}{9}$ （唯一驻点）。

所以当 $t = \frac{2}{9}$ 时 $f(t)$ 有最小值 $\frac{68}{9}$ ，即 $|M_0 M_1|^2$ 有最小值

$\frac{68}{9}$ ，故 $|M_0 M_1|$ 有最小值 $\frac{2\sqrt{17}}{3}$ 。

所以点 $M_0(1, 0, 1)$ 到直线 L 的距离为 $d = \frac{2\sqrt{17}}{3}$ 。

方法八：利用多元函数条件极值求解

解：将直线转化为一般方程 $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x-z-2=0 \end{cases}$ ，设

$M_1(x, y, z)$ 为 L 直线上任意一点，则

$$|M_0 M_1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

可得点 M_0 到直线 L 的距离为 $d = |M_0 M_1|_{\min}$ ，令

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2$$

所以问题转化为求函数

$f(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2$ 在条件 $x-2y+3=0$ 和 $x-z-2=0$ 下的最小值。构造拉格朗日函数

$$L(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 + \lambda(x-2y+3) + \mu(x-z-2)$$

$$\text{令 } \begin{cases} L_x = 2x-2+\lambda+\mu=0 \\ L_y = 2y-2\lambda=0 \\ L_z = 2z-2-\mu=0 \\ x-2y+3=0 \\ x-z-2=0 \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} x = \frac{13}{9} \\ y = \frac{20}{9} \\ z = -\frac{5}{9} \end{cases}$$

于是，得可能极值点为 $M_1(\frac{13}{9}, \frac{20}{9}, -\frac{5}{9})$ ，由问题

的性质知，该点即为函数 $f(x, y, z)$ 的最小值 $\frac{68}{9}$ ，即 $|M_0 M_1|^2$ 有最小值 $\frac{68}{9}$ ，故 $|M_0 M_1|$ 有最小值 $\frac{2\sqrt{17}}{3}$ 。

所以点 $M_0(1, 0, 1)$ 到直线 L 的距离为 $d = \frac{2\sqrt{17}}{3}$ 。

四、结束语

本文主要探索了空间中点到直线的距离的八种求解方法，各种方法之间各有侧重，从涉及知识点来看，解法一、二、三均是从向量的运算入手，其中解法一突出在利用向量的数量积、解法二突出在向量积的几何意义上、解法三突出在向量的投影方面；解法四、五、六则主要是围绕空间中点、直线、平面间的关系进行求解，其中解法四突出空间直线的参数方程、解法五突出空间直线的垂面方程、解法六突出平面束方程的主要知识内容；解法七、八则是从函数的最小值角度进行求解，解法七主要转化为一元函数的最小值、解法八则是从多元函数的条件极值的知识内容展开。通过对一个问题不同求解方法的研究，可以更好地掌握相关知识内容的各种理论以及应用，对知识的梳理以及思维的提升起着很好的促进作用。

参考文献：

- [1] 同济大学数学系编，高等数学（第七版下册）[M]. 北京：高等教育出版社，2017.
- [2] 刘顺琴. 空间直角坐标系下点到直线的距离的几种计算方法[J]. 数学学习与研究，2020（26）：28-29.
- [3] 吕良端. 空间点到直线距离的几种常见方法[J]. 江西科学，2020（5）：612-622、642.

作者简介：郑和柏（1986-），男，湖南邵东人，陆军特种作战学院，长期从事高等数学教学。