

开放教育《离散数学（本）》图论教学内容探讨

朱新顺

（兵团开放大学 国家开放大学成边教育研究中心，新疆 乌鲁木齐 830001）

【摘要】 本文立足开放教育，以计算机本科专业《离散数学（本）》课程为例，深入教学实践，对图论部分的主要考点进行了剖析，结合成人学生特点，对教学思路进行了梳理。重点介绍了图的矩阵表示与计算以及 Kruskal 算法求最小生成树，对重点教学内容进行了归纳和总结，对典型问题的求解过程给出了详细的步骤，并结合相关例题进行了进一步探讨，希望为广大从事该课程教学工作的教师提供有价值的参考。

【关键词】 开放教育；离散数学；图论

《离散数学（本）》是国家开放大学计算机科学技术本科的一门核心专业课，学生在学习过程中普遍反映难学难懂，自主学习力不从心。其中图论部分的内容考试比例较大，图论是《离散数学（本）》的重要教学内容，也是本课程主要考点章节。通过对历届试题分析不难发现，图论部分考点题型具有“关键少数”特点，即考点集中在少数特定知识点上，考试题型固定在少数几种题型上，只要学生在这些考点上多花时间、多下功夫，一定会取得较好的成绩。

图论是一个古老而又年轻的数学分支，它通过图的方法研究客观世界，在工程科学、物理学、计算机科学和管理科学等诸多领域都可以见到图论的足迹。图论的应用非常广泛，与概率论、矩阵论、群论、数值分析、拓扑学等有密切关系，平面图在图的特征研究及实际应用中，如集成线路的布线、城市道路规划等方面都有重要的应用。随着科学的发展，图论在解决运筹学、网络理论、信息论、控制论、博弈论以及计算机科学等众多领域的问题时，显示出越来越强大的功效。作为离散数学的一部分，所需要的数学基础主要包括有关集合理论和线性代数的一些基础知识。掌握好图论内容，对培养和提高学生的数学建模能力和抽象思维能力有很大帮助，对于计算机专业本科学生而言，学好图论将为《计算机网络》、《软件工程》等专业课程学习奠定良好的基础。分析开放教育《离散数学（本）》主要考点，在图论部分考点中，主要集中在图的矩阵表示与计算以及 Kruskal 算法求最小生成树。

一、图的矩阵表示与计算

已知图 G 的结点集和边集，求以下 4 种相关问题：

- （1）给出 G 图形表示
- （2）求邻接矩阵
- （3）求出每个节点的度数
- （4）画出补图图形

问题（1）的求解，可以先将结点集中的结点分散的画出，并标明结点元素符号。边集是边的集合，每条边由结点偶对表示，因此接下来依次连接偶对结点得到所有的边。由于每条边没有方向，所以最终得到无向图。

问题（2）的求解，根据顶点个数可以判断出邻接矩阵的规模，无向图的邻接矩阵是对称矩阵，其中元素的计算按以下规则进行：

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 相邻,} \\ 0 & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 不相邻或 } i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

问题（3）的求解，通过观察无向图，计算每个结点所连接边的条数就是该结点的度数。

问题（4）的求解，通过观察无向图，保留所有结点，删除所有相邻结点边，增加所有不相邻结点的边，可以得到补图。

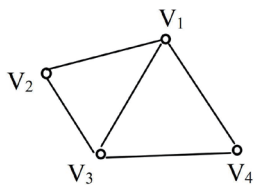
下面以国家开放大学计算机科学技术本科专业《离散数学（本）》试题为例，通过试题分析和求解进一步探讨图的矩阵表示与计算过程。

例 1 设 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$, 试（1）给出 G 图形表示；（2）写出其邻接矩阵；（3）求出每个节点的度数；（4）画出其补图图形。

试题分析：对于问题（1），可以先画出 4 个结

点并标明结点元素符号, 根据边集依次连接 v_1v_2 、 v_1v_3 、 v_1v_4 、 v_2v_3 、 v_3v_4 , 从而得到无向图。对于问题 (2), 因为有四个结点且为无向图, 所以邻接矩阵应为 4 阶对称方阵, 每一行表示一个结点, 每一列也表示一个结点, 因为每个结点不存在自回路, 所以 4 个主对角线元素值都为 0。观察无向图, 发现只有 v_2v_4 结点之间没有边, 其他任意两个结点之间都有边相连, 即结点相邻。所以 a_{24} 与 a_{42} 元素为 0 之外, 其他元素值都为 1, 最终得到了邻接矩阵。对于问题 (3), 观察无向图, 与 v_1 结点相连的边有 3 条, 因此 $\deg(v_1) = 3$, 类似地可以分别计算出 v_2 、 v_3 、 v_4 结点的度数。对于问题 (4), 在无向图的基础上, 保留所有结点 $v_1v_2v_3v_4$, 删除所有相邻结点边, 即 v_1v_2 、 v_1v_3 、 v_1v_4 、 v_2v_3 、 v_3v_4 , 增加所有不相邻结点的边 v_2v_4 , 从而得到补图。

解: (1) G 的图形表示如下图所示



(2) 邻接矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

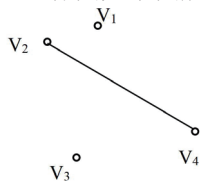
(3) $\deg(v_1) = 3$,

$\deg(v_2) = 2$,

$\deg(v_3) = 3$,

$\deg(v_4) = 2$

(4) 补图如下图所示:



图的矩阵表示与计算是图论部分的重要基础, 根据无向图 G 的结点集和边集求图形表示应首先明确图的结点集与边集的关系, 可以现绘出所有结点, 然后根据边集绘出存在关系的边, 得到正确的图形表示。在求邻接矩阵时, 理解图的邻接矩阵表示方法以及图的邻接矩阵与图的特征之间的关系, 应明确无向

图对应的邻接矩阵一定是对称方阵。而在求补图时, 最容易疏漏的是将没有边相连的孤立结点忽略遗漏, 防止出错的方法是在原图的基础上描出边集以外的所有边, 从而得到任意两结点间都有边相连的完全图, 然后以完全图为基础, 画出所有结点和边集以外的所有新增边, 从而得到正确的补图。

二、Kruskal 算法求最小生成树

Kruskal 算法是在 1956 年由克鲁斯卡尔于提出来的。Kruskal 算法的基本思想为: 选择无向加权连通图 G 中权值最小且不和已选择的边形成圈的边, 并将其添加到边集 E 中; 否则就选择下一条边, 直到边集 E 中有 $n-1$ 条边为止 (图 G 中有 n 个顶点)^[1]。Kruskal 算法特点是不断的选取最短的边, 并且各边不能形成环, 直到生成树。将生成树拓展为最小生成树, 首先应理解最小生成树有哪些重要特征, 一个有 n 个结点的连通图的生成树是原图的极小连通子图, 且必须包含原图中的所有 n 个结点, 并且有保持图连通最少的边。

对 Kruskal 算法做出描述, 设图 G 有 n 个结点, 以下算法产生的是最小生成树:

(1) 选择最小的边 e_1 , 置边数 $i \leftarrow 1$;

(2) $i=n-1$ 结束, 否则转 (3);

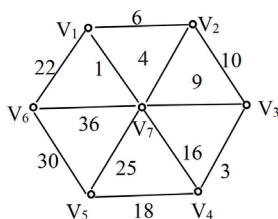
(3) 设已选定 $e_1, e_2, \dots, e_i$, 在 G 中选取不同于 $e_1, e_2, \dots, e_i$ 的边 e_{i+1} , 使得 $\{e_1, e_2, \dots, e_{i+1}\}$ 且 e_{i+1} 是满足此条件的最小边;

(4) $i \leftarrow i+1$, 转 (2)。^[2]

实现步骤是先把边按权由小到大排列起来, 依次挑选权尽可能小的边构造生成树。首先选取权最小的边, 再从其余边中选取权最小的边, 以不产生环为前提, 选取权最小的边作为添加边, 依次类推, 直到不存在合适的边为止。全部挑选的边与节点一起形成的图就是最小生成树。在实际情况中可能出现多条权值最小的边, 即权值最小且相等, 这时可以选择其中之一, 然后在不构成环的前提下再继续算法步骤, 所以图的生成树不是唯一的。

下面以国家开放大学计算机科学技术本科专业《离散数学(本)》试题为例, 通过试题分析和求解进一步探讨 Kruskal 算法求最小生成树过程。

例 2 试利用 Kruskal 算法求出如下所示赋权图中的最小生成树 (要求写出求解步骤), 并求此最小生成树的权。



试题分析: Kruskal 算法又称避圈法, 有回避回路含义, 通过分析图中权值, $w(v_1, v_7)=1$, 权值最小, 所有选定 v_1v_7 边定义为 e_1 ; 在图的剩余边中查找权值最小的边, $w(v_3, v_4)=3$, 权值最小, 所有选定 v_3v_4 边定义为 e_2 ; 继续在图的剩余边中查找权值最小的边, $w(v_2, v_7)=4$, 权值最小, 所有选定 v_2v_7 边定义为 e_3 ; 继续在图的剩余边中查找权值最小的边, $w(v_1, v_2)=6$, 权值最小, 但出现了 v_1v_7 、 v_2v_7 、 v_1v_2 三条边形成的环, 应回避, 不选 v_1v_2 作为最小生成树的边, 在图中的剩余边中查找权值次小的边, $w(v_3, v_7)=9$, 权值次小且不与已选定的边构成回路, 所有选定 v_3v_7 边定义为 e_4 ; 继续在图的剩余边中查找权值最小的边, $w(v_4, v_7)=16$, 权值最小, 但出现了 v_3v_7 、 v_3v_4 、 v_4v_7 三条边形成的环, 应回避, 不选 v_4v_7 作为最小生成树的边, 在图中的剩余边中查找权值次小的边, $w(v_4, v_5)=18$, 权值次小且不与已选定的边构成回路, 所有选定 v_4v_5 边定义为 e_5 ; 继续在图的剩余边中查找权值最小的边, $w(v_1, v_6)=22$, 权值最小, 所有选定 v_1v_6 边定义为 e_6 , 最终得到包含所有结点的最小生成树。

解: 用 Kruskal 算法求产生的最小生成树, 步骤为:

$w(v_1, v_7)=1$, 选 $e_1=v_1v_7$

$w(v_3, v_4)=3$, 选 $e_2=v_3v_4$

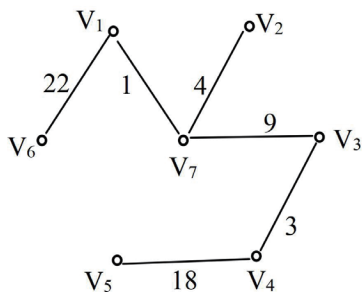
$w(v_2, v_7)=4$, 选 $e_3=v_2v_7$

$w(v_3, v_7)=9$, 选 $e_4=v_3v_7$

$w(v_4, v_5)=18$, 选 $e_5=v_4v_5$

$w(v_1, v_6)=22$, 选 $e_6=v_1v_6$

最小生成树如下图所示



三、结束语

开放教育《离散数学》图论部分考点中, 图的矩阵表示与计算需要学生掌握线性代数中矩阵的基本知识, 在复习过程中, 应注意前后问题的关联性, 图的矩阵表示包含的四个问题之间存在着互相依赖和转换关系, 这是图论部分的理论基础, 应熟练掌握其重难点, 也是为计算机网络相关课程学习奠定坚实的基础。开放教育理工课学生虽然在专科阶段已完成高等数学课程的学习, 但数学基础大都不好, 勤能补拙, 通过适量做题可以克服因线性代数基础薄弱造成的学习困难。熟能生巧, 多练习有利于掌握解题思路。Kruskal 算法求最小生成树求解过程虽然比较机械, 但求解过程中需要判断是否存在回路, 如果有回路, 需要回避。本文探讨辅导要点并通过例题进行点拨, 希望对辅导教师教学提供帮助, 也希望对学生的自主学习起到一定指导作用。

参考文献:

- [1] 杨本朝. 问题驱动模式下“组合与图论”课程信息化教学改革实践探究[J]. 工业和信息化教育, 2023 (06).
- [2] 张杨. 基于图论和复杂网络分析的资管产品系统性风险测度与监管政策效果研究[J]. 金融发展研究, 2022 (06).
- [3] 孙成娇. 微课在计算机类专业课程混合式教学中的探索——以离散数学课程为例[J]. 电脑与信息技术, 2024 (01).
- [4] 金百锁. 新时代背景下“以学生为中心, 以需求为导向”的信息与计算专业教学模式改革探究——以《离散数学》课程为例[J]. 大学数学, 2023(39).
- [5] 汪莹. 计算机科学与技术专业课程教学模式探索——以离散数学课程为例[J]. 知识文库, 2023 (12).
- [6] 梅颖. 基于“项目化学习+课程思政”的离散数学课程线上线下混合式教学实践[J]. 丽水学院学报, 2023 (02).
- [7] 刘香芹. 基于精细化达成的课程教学改革与研究——以离散数学课程为例[J]. 软件导刊, 2022 (09).

作者简介: 朱新顺(1972—), 男, 工程硕士, 兵团开放大学教学科研处副教授, 研究方向: 应用数学与数学教育。