

# 分形几何在高职院校数学教育中的美育融合

聂饶荣 朱槐洪

(江西师范高等专科学校, 江西 鹰潭 335000)

**【摘要】**本文探讨了分形几何在高职院校数学教育中的美育融合。通过分析分形几何的特性和美学价值,结合教学实践,提出了将分形几何融入《高等数学》、《数学实验》等课程的策略和方法。教学实践结果表明,分形几何在数学教育中的应用不仅可以促进学生对数学的理解,提高数学学习兴趣及学习能力,还可以培养其审美情趣和创新意识,提高数学素养,促进全面发展。

**【关键词】**分形几何; 数学教育; 美育融合; 教学实践案例

## 一、引言

现代教育中,核心素养被认为是学生全面发展的基石,而核心素养中的美育作为培养学生艺术修养和审美能力的重要手段,应该在课程教学中得到充分的重视和应用。在高职院校数学类课程的教学,美育的融入能提升学生的审美素养,激发学生对数学的学习兴趣,激发学生的数学创新思维,促进学生的全面发展。

分形几何(Fractal Geometry)是由数学家Benoît B. Mandelbrot在20世纪70年代提出的,旨在描述和分析自然界中那些具有自相似性的复杂形状<sup>[1]</sup>。作为一门新兴的数学分支,分形几何以其独特的美学魅力和丰富的应用价值引起了人们的广泛关注,其美学魅力主要体现在无限递归和自相似性上。通过简单的规则生成的复杂图形,如科赫雪花、曼德博集合等,展现了数学的奇妙和美丽。

分形几何不仅是数学领域的重要研究对象,还可以作为一种有效的教学资源,用于丰富数学教育的内容和方法。本文旨在探讨分形几何在高职院校数学教育中的美育融合,探讨其在数学类课程教学中的具体教学实践和现实意义,以促进数学美育教育,提高学生数学素养,同时为高职院校数学教育的改革与发展提供有益的借鉴。

## 二、分形几何简介

分形几何是20世纪发展起来的一门新兴的数学分支,它研究的对象是具有自相似性的几何图形,应用于自然科学和社会科学的众多领域<sup>[2]-[4]</sup>。分形几何的美学价值在于它所呈现的错综复杂、富有层次感的图形,在视觉上给人以美的享受。以下是一些具有代表性的分形几何图形:

### (一) 科赫雪花曲线

科赫雪花(Koch Snowflake)是瑞典数学家Helge von Koch于1904年提出,其构造可通过递归的方法来实现。首先将等边三角形的每条边等分为三等份,之后在中间段上构造一个新的等边三角形,并去掉原始三角形的中间段,如此反复进行无限

次。每次递归都会增加图形的复杂度,使边的数量逐渐增加,形成一个越来越复杂的图形,当递归次数趋于无穷时,科赫雪花的周长趋向于无穷大,而面积却收敛于有限值。

科赫雪花由于其独特的美学特征,常被用于艺术设计和计算机图形学中,许多雪花形状的装饰图案、计算机生成的自然景观等,都可以通过类似科赫雪花的分形算法来生成。

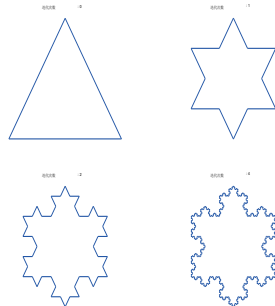


图1 科赫雪花迭代曲线(图像于matlab中生成)

### (二) Sierpinski垫片

Sierpinski垫片,由波兰数学家Wacław Sierpiński于1915年提出,其构造是从一个等边三角形开始,通过将每个三角形的三条边的中点连接,形成四个小等边三角形,然后去掉中间的倒三角形,接着对每个剩余的小三角形重复这一过程,直到达到所需的迭代次数。当迭代次数趋于无穷时,去掉的倒三角形越来越多,最终剩余部分的面积趋向于零。

Sierpinski垫片展示了自相似性和无限重复的美妙,通过理解和构建Sierpinski垫片,不仅能深入理解抽象思维和逻辑推理,还能直观地探索分形、无穷递归等数学概念,激发创造力和探索精神。



图2 迭代次数分别为0、1、3、5次的sierpinski垫片(图像于matlab中生成)

### (三) 分形树

分形树是通过观察自然界中树木分支结构的观察，建立模型而得到的，其概念和生成方法可以追溯到20世纪早期对分形几何的研究。这些研究包括了对自然界中复杂形态如海岸线、树木、云彩等的数学建模，其中分形树作为一个具有代表性的例子，通常被用来展示分形几何的自相似性和递归结构。

分形树的生成过程始于一条垂直线段，象征着树干的起始点。每一级分支从父级分支的末端延伸出来，根据设定的规则确定其长度和角度，递归地重复这一过程，每个新生成的分支都成为下一级分支的父级，直到达到预设的分支级数或停止条件。

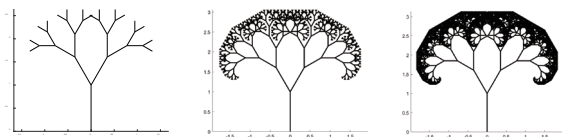


图3 迭代次数分别为5、10、15次的分形树（图像于matlab中生成）

### 三、分形在课程教学中的应用案例

(一) 分形在《高等数学——无穷级数》中的美育教学案例

高等数学课程通常以严谨的数学理论和技巧为主，但仍可以在课程中选取合适的内容点融入分形美学的概念和元素，以增强学生的数学学习体验和兴趣。本文提供一个分形在无穷级数中的美育教学案例。

#### 1. 教学目标：

- ① 了解级数的基本概念和性质；
- ② 探讨分形与级数理论之间的关系；
- ③ 培养学生的审美情感和美学素养；
- ④ 提高学生的数学思维能力和创造力。

#### 2. 教学内容：

- ① 级数的基本概念和收敛性；
- ② 分形的基本特征和生成方法；
- ③ 分形与级数理论之间的联系和应用。

#### 3. 教学具体实施过程：

- ① 环节一：级数基本概念及其敛散性（略）
- ② 环节二：分形图形简介

以简单分形图形为例，介绍分形的定义及分类，探讨分形的自相似性及尺度不变性，通过示例展示几个常见的分形图形，如科赫曲线、科赫雪花、Sierpinski垫片等。

#### ③ 环节三：建立分形与级数理论的联系

选择一个分形级数实例：科赫雪花曲线。

提出问题：构造级数，计算科赫雪花曲线的长度及其所围图形的面积。

解决问题：不妨令 $s_n$ 、 $l_n$ 分别表示第 $n$ 个多边形的边数和边长，则

$$s_0 = 3, s_1 = 3 \times 4, s_2 = 3 \times 4^2, \dots, s_n = 3 \times 4^n.$$

$$l_0 = 1, l_1 = \frac{1}{3}, l_2 = \frac{1}{3^2}, \dots, l_n = \frac{1}{3^n}.$$

令 $p_n$ 、 $A_n$ 分别表示第 $n$ 个多边形比第 $n-1$ 个多边形多出来的周长和面积。则

$$p_n = s_n \cdot l_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1},$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} l_n^2 \cdot s_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 \cdot 3 \cdot 4^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1},$$

其中 $n=1, 2, 3, \dots, n, \dots$ 。

若令 $p_0=3$ 、 $A_0=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 分别表示初始边长为1的正

三角形的周长和面积，则科赫雪花的周长可表示为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ ，面积可表示为级数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ 。

接下来计算级数 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ 。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_n &= p_0 + p_1 + \dots + p_n + \dots = 3 + \left(\frac{4}{3}\right)^0 + \left(\frac{4}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + \dots \\ &= 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^0 \left(1 - \left(\frac{4}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{4}{3}} = 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = \infty \end{aligned}$$

级数发散，科赫雪花的周长为无穷大。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n &= A_0 + A_1 + \dots + A_n + \dots = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^0 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \dots + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + \dots \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{9}\right)^0 \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 9 \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

级数收敛，科赫雪花的面积为定值 $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ 。

本案例揭示了一个有趣的结果：科赫雪花有着无穷大的边界，却包围着有限的面积。

#### ④ 环节四：分组讨论与展示

每个学习小组选择一个分形级数实例，进行分析讨论，并展示分析结果。全班共同讨论分组展示的内容，组间交流观点和见解。

#### ⑤ 环节五：总结和反思

总结课程内容，强调分形在级数理论中的应用价值。

教学实践结果反馈：通过这个案例的学习与分析，学生了解了分形级数的生成过程及其计算方法，加深了对分形和级数的理解与认识，同时培养了学生的数学思维能力、审美情感和美学素养。

(二) 分形在《数学实验》课程中的美育教学案例

本文介绍一个基于matlab软件探索与生成分形图像的实验教学案例。<sup>[5]-[6]</sup>

#### 1. 实验主题：科赫曲线的matlab实现

#### 2. 实验目标：

- ① 了解科赫曲线的图形特征；
- ② 学习使用数学软件进行分形图形的生成和可视化；

- ③ 培养学生的观察力和实验能力;
- ④ 提高学生的数学创造力和美学素养。

### 3. 实验内容

#### ① 实验背景介绍

讲解分形几何图形的基本概念和特征,展示一些常见的分形图形。

#### ② 数学软件基本语法讲解

介绍本次实验会用到的基本语法,包括定义函数(function)、绘图函数plot、条件语句(if-else)、递归算法等。

#### ③ 编写代码,用软件生成科赫曲线

给出科赫曲线的生成算法和matlab代码框架,指导学生编写、调试和优化代码。

代码示例如下:

首先创建递归生成科赫曲线的函数。

```
function [y]=koch_segment(p1,p2,n)
if n==0 %当迭代次数为0时,返回当前线
```

段的起点和终点

```
y=[p1; p2];
else % 将线段分为三等分
p3=p1+(p2-p1)/3;
p5=p1+2*(p2-p1)/3;
p4=p3+rotate(p5-p3,pi/3); % 递归
```

生成柯赫曲线的三条线段

```
y1=koch_segment(p1,p3,n-1);
y2=koch_segment(p3,p4,n-1);
y3=koch_segment(p4,p5,n-1);
y4=koch_segment(p5,p2,n-1); % 将三
```

条线段合并成一条曲线

```
y=[y1(1:end-1,:); y2; y3; y4(2:
end,:)];
end
end
```

然后定义旋转向量的函数。

```
function [v_rotated]=rotate(v,angle)
rotation_matrix=[cos(angle),-sin
(angle); sin(angle),cos(angle)];
v_rotated=v*rotation_matrix;
end
```

最后编写科赫曲线的生成代码:

```
p1=[0,0];
p2=[1,0]; %定义初始线段的起点和终点
n=4; %设置迭代次数
koch_curve = koch_segment(p1,p2,n);
%生成柯赫曲线的函数
plot(koch_curve(:,1),-koch_curve
(:,2),'b','LineWidth',2); %绘
制柯赫曲线
```

axis equal;

图像生成效果如下:

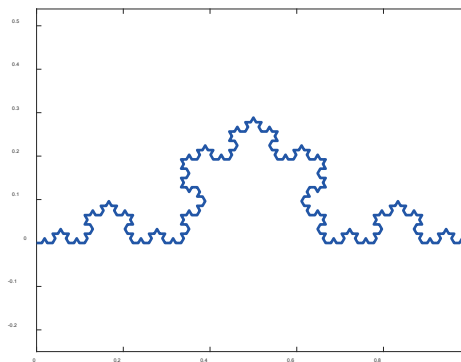


图4 迭代次数为4的科赫曲线(图像于matlab中生成)

#### ④ 实验报告撰写

学生根据实验结果撰写实验报告,包括科赫曲线的生成代码、图形展示和结果分析。

#### ⑤ 实验总结

学生分组展示实验结果和分析报告,共同探讨不同分形图形之间的联系与差异。

教学实践结果反馈:通过这个实验,学生实际操作深入了解了分形几何的特性和美学意义,并提高了数学实验能力、团队合作能力、观察总结能力等,促进了对数学的深入理解和应用。

### 四、总结

本文在传统数学教育的基础上,创新性地引入分形几何,将其美学价值融入到课程教学中,此举不仅可促进学生对所授数学知识的理解,还可增强他们的审美情感和美学素养,促进全面发展。

### 参考文献:

- [1]B.B.Mandelbrot.The Fractal Geometry of Nature[M].W.H.Freeman, 1982.
- [2]孙霞.分形原理及其应用[M].中国科学技术大学出版社, 2003.
- [3]王达.几类复系统分形的特性分析与控制[D].山东大学, 2016.
- [4]刘莹,胡敏,余桂英,等.分形理论及其应用[J].江西科学, 2006, (02): 205-209.
- [5]齐东旭.分形及其计算机生成[M].北京:科学出版社, 1994.
- [6]曾文曲,王向阳.分形理论与分形的计算机模拟[M].沈阳:东北大学出版社, 2002.

基金项目:江西省教育厅科学技术研究项目,项目编号: GJJ213209。

### 作者简介:

聂饶荣(1990—),女,硕士研究生,研究方向:分形几何;朱槐洪(1986—),男,硕士研究生,研究方向:非线性泛函分析。